Examen HAVO

2023

tijdvak 1
dinsdag 23 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Parabool en grafiek van een wortelfunctie

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x-5}$.

3p **1** Bereken op exacte wijze het domein van f.

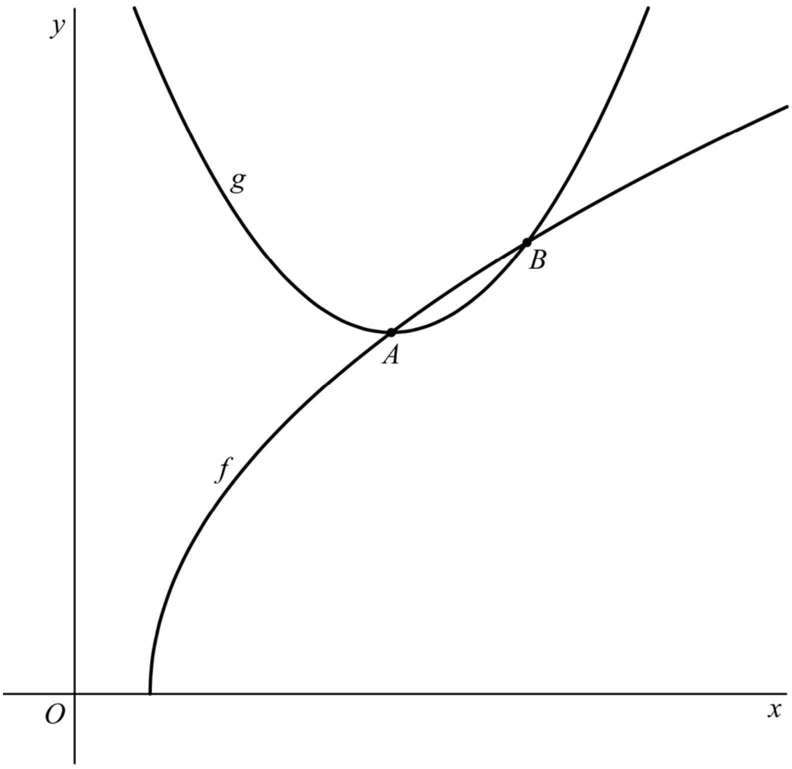
De functie g wordt gegeven door:

$$g(x) = a(x-p)^2 + q$$

Hierin zijn a, p en q constanten.
De grafiek van g is een parabool.

Het punt A ligt op de grafiek van f en in dit punt A geldt $f'(x) = \frac{3}{4}$.
Daarnaast is punt A ook de top van de grafiek van g.
Het punt B ligt op beide grafieken en heeft x-coördinaat 10.
Zie de figuur.

figuur

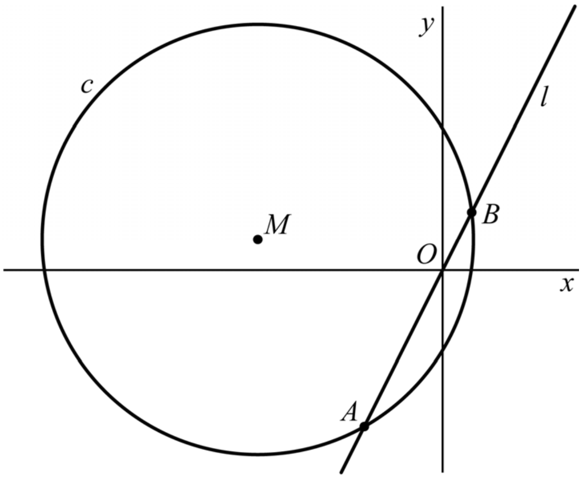


8p **2** Bereken exact de waarden van a, p en q.

Twee cirkels en twee lijnen

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door $(x+6)^2+(y-1)^2=49$.
Ook is gegeven de lijn l met vergelijking $y=2x$.
De cirkel en de lijn snijden elkaar in de punten A en B. Punt A ligt onder de x-as, punt B ligt boven de x-as. Zie figuur 1.

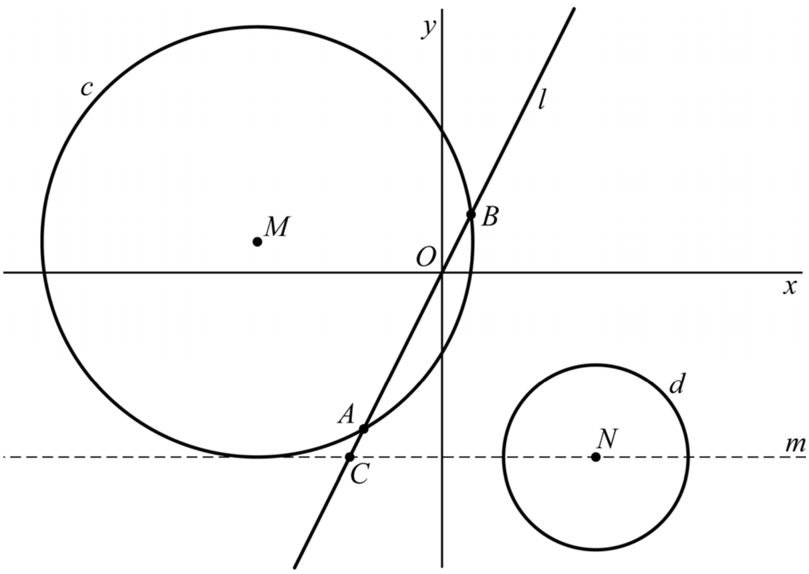
figuur 1



4p **3** Bereken algebraïsch de x-coördinaat van B. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

De lijn m is de horizontale raaklijn aan de onderkant van c.
Het punt C is het snijpunt van m en l.
Het punt N ligt op m op een afstand 8 rechts van C.
De cirkel d heeft N als middelpunt en straal 3.
Zie figuur 2.

figuur 2

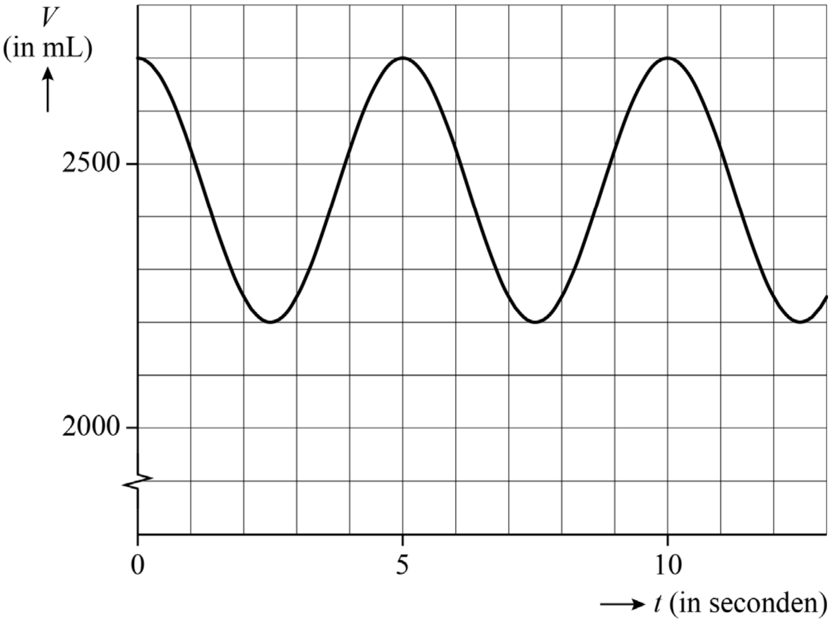


6p **4** Bereken exact de afstand tussen de twee cirkels.

Ademhaling

In deze opgave bekijken we het **longvolume**. Dit is de hoeveelheid lucht in de longen van de mens. In figuur 1 is voor een bepaalde persoon in rust weergegeven hoe dit longvolume V afhangt van de tijd. Hierbij is V in mL en t de tijd in seconden.

figuur 1



Deze grafiek is te beschrijven met een formule van de volgende vorm:

$$V = p + q \cdot \cos(rt)$$

4p **5** Bereken de waarden van p, q en r. Geef niet-gehele waarden in je eindantwoord in twee decimalen.

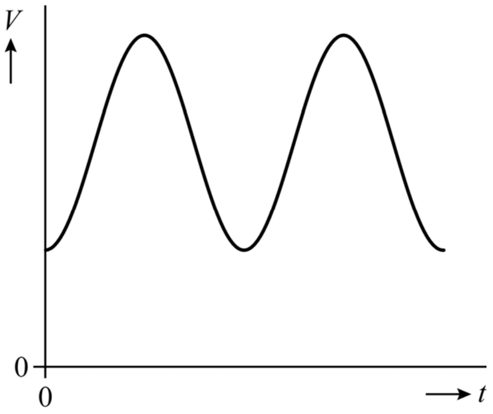
Als een persoon zich inspant, zal hij sneller gaan ademen. Ook ademt hij elke keer méér lucht in dan wanneer hij in rust is.

Voor iemand die zich inspant, geldt:

$$V = 2500 + 1200 \cdot \sin(4{,}19(t - 0{,}37))$$

Hierin is V het longvolume in mL en t de tijd in seconden.
In figuur 2 is een schets van de bijbehorende grafiek te zien.

figuur 2

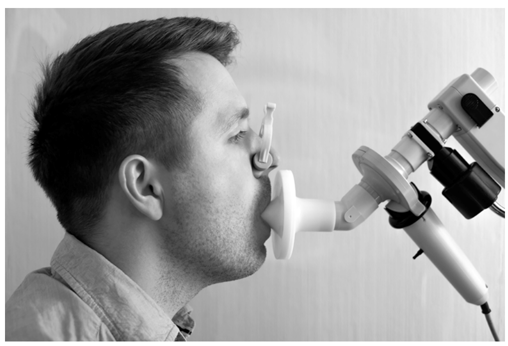


De hoeveelheid lucht die deze persoon elke keer inademt, is gelijk aan het verschil tussen het maximum en het minimum van V.
Gedurende één minuut ademt deze persoon meerdere keren in. In totaal ademt hij dan bijna 100 liter lucht in.

4p **6** Bereken hoeveel liter lucht deze persoon per minuut inademt. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Een test om na te gaan hoe goed iemands longen werken is de zogeheten spirometrietest. De persoon moet tijdens deze test krachtig in een apparaat blazen. Zie de foto.

foto



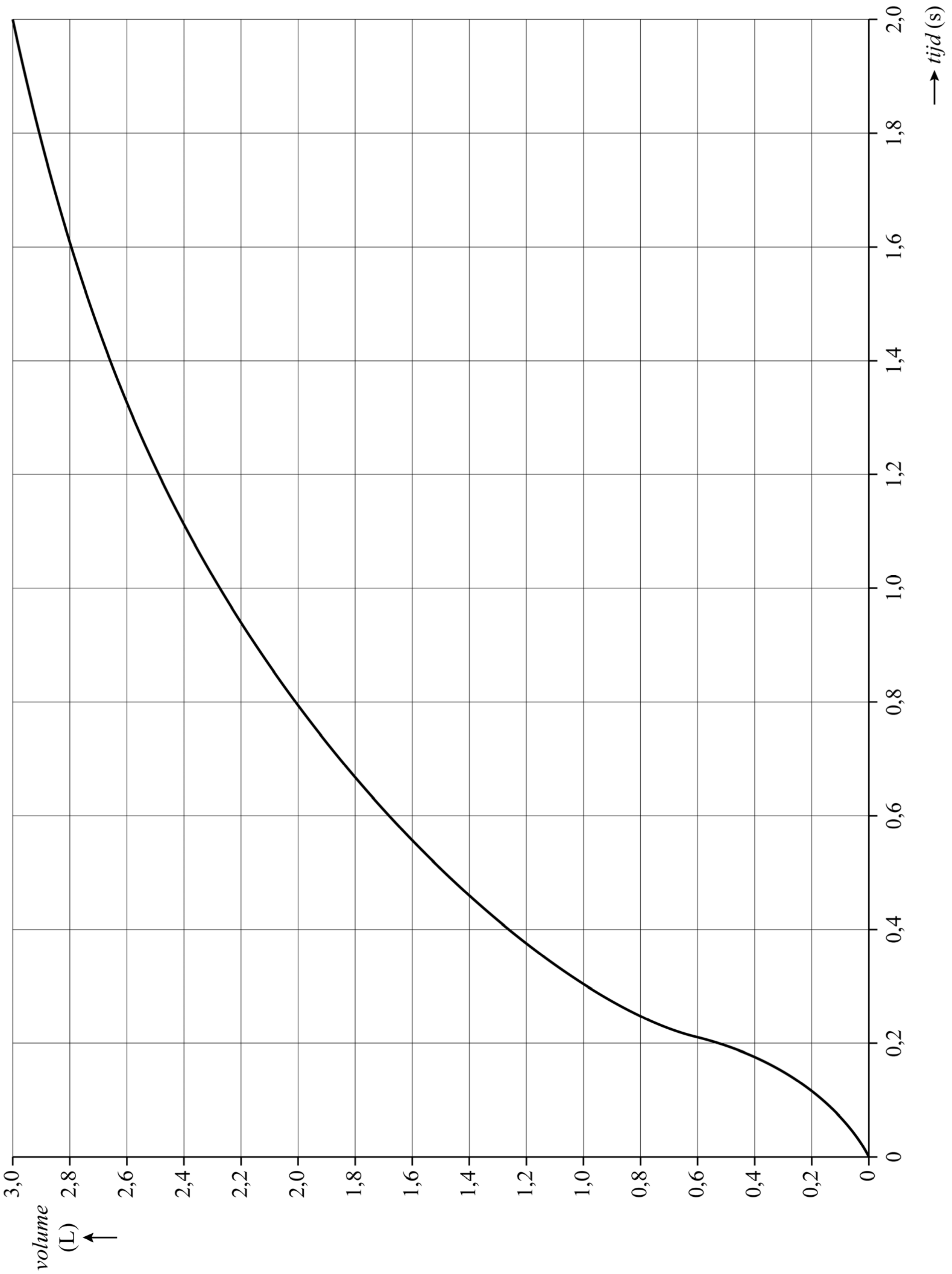
Benny moet zo'n test ondergaan. Het resultaat is te zien in de grafiek op de uitwerkbijlage. Op de verticale as staat het volume uitgeademde lucht in liters en op de horizontale as de tijd in seconden.

Er is een moment waarop de snelheid waarmee de persoon uitblaast, maximaal is. Deze maximale snelheid, in liters per minuut, wordt de **PEF** (peak expiratory flow) genoemd.

4p **7** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage de PEF van Benny in liters per minuut. Geef je eindantwoord als geheel getal.

uitwerkbijlage

7



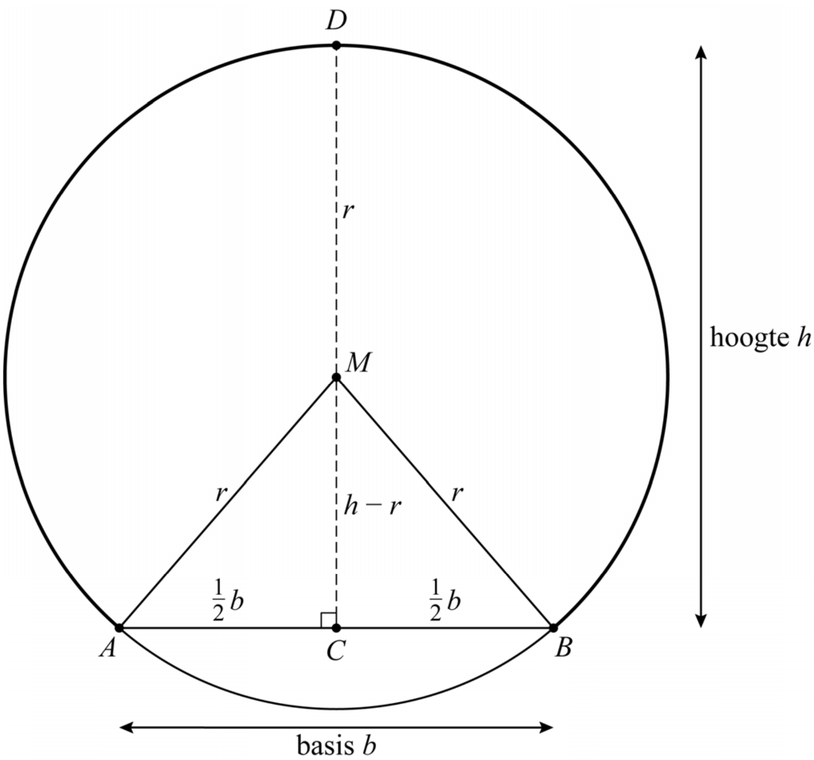
Transition

Transition is een kunstwerk dat langs de autoweg N34 bij Eext in Drenthe staat. Het is een gekromde buis die gedeeltelijk ingegraven is in de grond. Zie de foto.

foto

In de figuur is een model weergegeven van een van de uiteindes van de buis: een cirkel met middelpunt M en straal r. Punt D is het hoogste punt van de buis. De **doorgang** van de buis is het deel van de cirkel boven lijnstuk AB. De basis van de doorgang is lijnstuk AB. De lengte van de **basis** is b. Punt C is het midden van AB. De afstand tussen C en D is de hoogte h van de doorgang. Lijnstuk CD staat loodrecht op AB. Er geldt dus $CM = h - r$. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Er is een formule waarmee je de straal r kunt berekenen bij de gegeven basis en hoogte, namelijk:

$$r = \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h} \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is r de straal, b de lengte van de basis AB en h de hoogte CD.
Er geldt $h \geq r$.

Met behulp van driehoek ACM kun je bewijzen dat formule 1 juist is.

4p **8** Bewijs dat formule 1 juist is. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

In het kunstwerk *Transition* is de straal r gelijk aan 1,63 m.
Voor het ingraven van de buis was het handig om te weten hoe lang de basis b moest zijn. Deze lengte hangt af van de gewenste hoogte h.

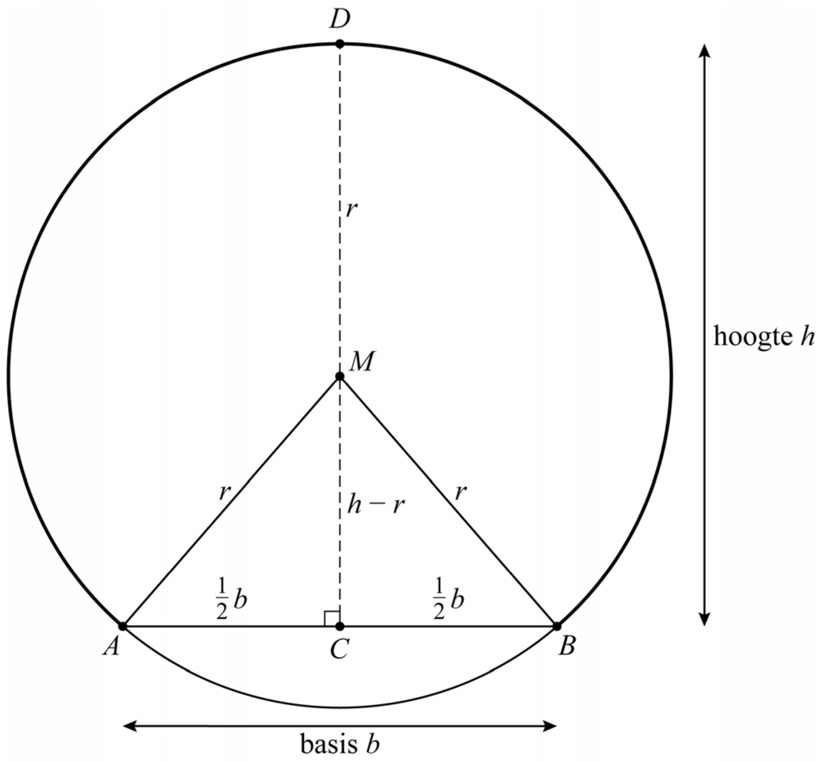
Je kunt formule 1 herleiden tot een formule waarin b wordt uitgedrukt in h.
Voor $r = 1{,}63$ is formule 1 te schrijven in de volgende vorm:

$$b = p \cdot \sqrt{q \cdot h - h^2} \qquad \text{(formule 2)}$$

Hierin zijn p en q constanten.

3p **9** Herleid formule 1 tot de vorm van formule 2.

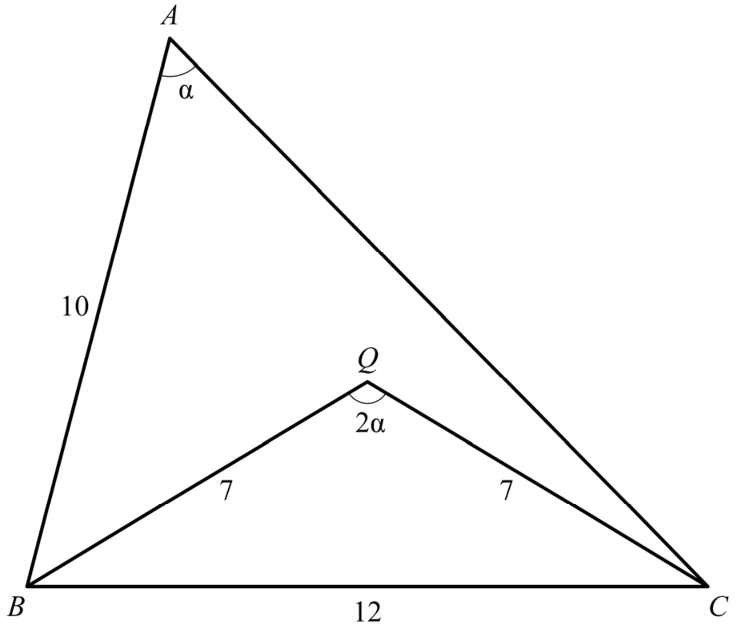
8



Halve hoek

Gegeven zijn de driehoeken ABC en BCQ met $AB = 10$, $BC = 12$, $BQ = CQ = 7$ en $\angle BAC = \alpha$. Bovendien is gegeven $\angle BQC = 2\alpha$.
Zie de figuur.

figuur



6p **10** Bereken AC. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Twee functies

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$.

Het is mogelijk de grafiek van f door middel van transformaties te laten ontstaan uit de grafiek die hoort bij de formule $y = 2^x$. Dit kan op verschillende manieren. Er is een manier die alleen gebruikmaakt van translaties, dus **zonder** vermenigvuldigingen ten opzichte van x-as of y-as.

3p **11** Bewijs dat er zo'n manier is. In je antwoord moeten de translaties worden genoemd.

Op de grafiek van f ligt een punt met y-coördinaat 10.

4p **12** Bereken exact de x-coördinaat van dit punt.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = -2^{x-3} + 2$.

Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g.

4p **13** Bereken exact de coördinaten van S.

Tienkamp

De tienkamp is een sportwedstrijd waarbij atleten gedurende twee dagen tien atletiekonderdelen moeten afleggen. Twee onderdelen van de tienkamp zijn hoogspringen en 1500 m hardlopen.

Met formules worden de resultaten van de onderdelen omgezet in punten. Vervolgens worden alle punten die de atleet op de onderdelen heeft behaald, opgeteld. De atleet met de meeste punten wint de tienkamp.

Per onderdeel is ooit bepaald wat de ondergrens is om punten te scoren. Bij het hoogspringen was die ondergrens een hoogte van 75 cm. Daarom krijgt de atleet 0 punten als hij 75 cm of lager springt. Bij sprongen met een hoogte boven 75 cm behaalt de atleet wél punten. Bij een sprong met een hoogte van 220 cm krijgt hij 1000 punten.

Bij het hoogspringen gebruikte men tot het jaar 1920 voor sprongen vanaf 75 cm een lineaire formule van de volgende vorm:

$$P = a \cdot (H - b)$$

Hierin is P het aantal punten en H de gesprongen hoogte in centimeters ($H \geq 75$) en zijn a en b constanten.

4p **14** Bereken de waarden van a en b. Geef niet-gehele waarden in je eindantwoord in één decimaal.

Een lineaire formule werd niet eerlijk gevonden, omdat bijvoorbeeld een verbetering van 75 cm naar 76 cm makkelijker te behalen is dan een verbetering van 160 cm naar 161 cm, terwijl dat toch evenveel extra punten oplevert. Daarom wilde men een andere formule, waarbij een verbetering van bijvoorbeeld 1 cm, méér extra punten oplevert naarmate er hoger wordt gesprongen.

De formule die tegenwoordig voor het hoogspringen gehanteerd wordt, is

$$P = 0,8465 \cdot (H - 75)^{1,42}$$

Hierin is P weer het aantal punten en H de gesprongen hoogte in centimeters ($H \geq 75$).

Het aantal punten dat je extra verdient door 1 cm hoger te springen, wordt steeds groter.

2p **15** Leg dit uit met behulp van de formule, zonder getallen in te vullen of een schets/tekening te maken.

De punten die bij de tienkamp-onderdelen worden behaald, worden eerst met de bijbehorende formule berekend en daarna naar beneden afgerond op een geheel getal. Dus als de uitkomst van de formule bijvoorbeeld 982,73 is, dan krijgt de atleet 982 punten.

Bij het onderdeel 1500 m hardlopen wordt de volgende formule gebruikt:

$$Q = 0,03768 \cdot (480 - t)^{1,85}$$

Hierin is Q het aantal punten en t de gelopen tijd in seconden. Deze tijd wordt altijd gemeten in honderdsten van seconden nauwkeurig.

Op 1 juli 2019 was tot dan toe de beste prestatie bij het onderdeel hoogspringen een sprong met hoogte 228 cm.
Er worden verschillende tijden gelopen op de 1500 m hardlopen waarmee je méér punten behaalt dan met een sprong van 228 cm hoog.

5p **16** Bereken de **langzaamste** tijd waarmee je méér punten behaalt dan met een sprong van 228 cm hoog. Geef je eindantwoord in minuten en seconden, met het aantal seconden in twee decimalen.

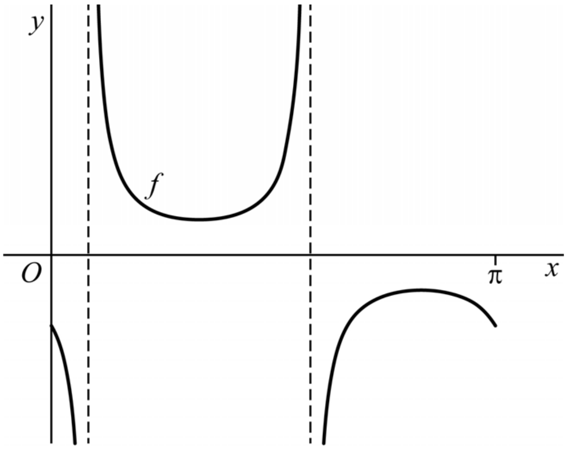
Cosinusbreuk

Voor $0 \leq x \leq \pi$ wordt de functie f gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{4\cos\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)}$$

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1

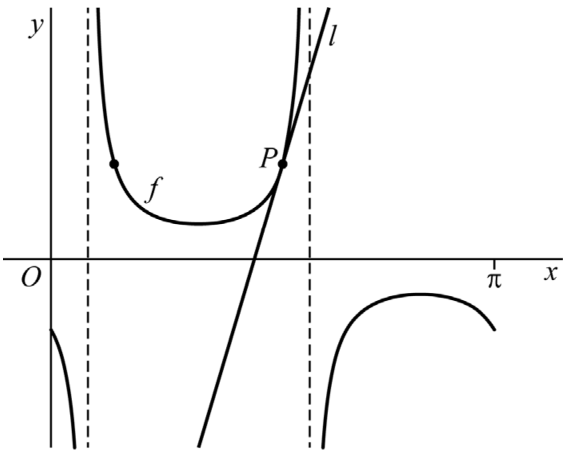


De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten.

4p **17** Stel op exacte wijze voor beide asymptoten een vergelijking op.

Op de grafiek van f liggen twee punten met y-coördinaat $\frac{2}{3}$. Het rechter punt is P. Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in P. Zie figuur 2.
De richtingscoëfficiënt van l kan met de grafische rekenmachine worden benaderd.

figuur 2



3p **18** Bereken de richtingscoëfficiënt van l. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.